ISSN 1986-518X ***ISTRAŽIVANJE MATEMATIČKOG OBRAZOVANJA***

Vol. II (2010), Broj 3, 27-32
Originalni istraživački članak

Kako (budući) učitelji razumiju algebarske generalizacije - jedno istraživanje o parnim i neparnim brojevima[1]

Daniel A. Romano
Pedagoški fakultet Bijeljina, Semberskih ratara bb, 76300 Bijeljina
e-mail: bato49@hotmail.com

Sažetak:

U zadnjih petnaestak godina, u naučnoj literaturi nerijetko se pojavljuju članci za zahtjevom da se elementi algebre involviraju u aritmetiku. Prema velikom broju izvještaja međunarodnih istraživača matematičkopg obrazovanja, to uključivanje elemenata algebre u aritmetiku odvija se sa poteškoćama. Postoje mnogi izvještaji istraživača koji snažno sugerišu da blaga algebraizacija artimetičkih sadržaja u nižim razredima osnovne škole dovodi do učeničkog boljeg razumijevanja aritmetičkih struktura, generalizacije aritmetike i manje problematičnog prelaza iz aritmetike u ranu algebru.

Nas je zanimalo - da li je takav postupak moguć i u našem obrazovnom sistemu. U ovom izvještaju, mi analiziramo jedan problem sa kojima se mogu susresti učitelji u blagoj algebraizaciji aritmetike. Na jednom jednostavnom i standardnom primjeru - pojmu parnih i neparnih prirodnih brojeva, analizirane su vještine algebarske generalizacije studenata studijskog programa za obrazovanje učitelja na dva univerziteta u Bosni i Hercegovini. U intervjuu su učestvovali redovni studenti dva univerziteta (studenti treće i četvrte godine studija), studenti studijskog programa za doškolovavanje učitelja (četvrta godina) te studenti studijskog programa za obrazovanje vaspitača (prva godina).

Studenti studijskog programa za učitelje uspješno su okončali osmogodišnju osnovnu školu i četvorogodišnju srednju školu. Tokom tih dvanaest godina prethodnog školovanja imali su najmanje deset godina matematiku. U najmanje tri puta, u prvom i šestom razredu osnovne škole, te u prvom razredu srednje škole, oni su se susretali sa pojmom parnosti i neparnosti prirodnih brojeva. Međutim, ovo istraživanje nam sugeriše da učitelji, školovani po aktuelnom nastavnom planu i programu, još uvijek nisu spremni čak ni na (vođenu) intarziju elemenata rane algebre u nastavu osnovnoškolske aritmetike.

Ključne riječi: parni i neparni brojevi, aritemtika, rana algebra, algebra, generalizacije, intervencije, učitelji

Abstract

This research suggest to us that teachers, commonly educated in our educational system, are not competent for inclusion of algebra methods in primary school arithmetic's. In this article we give report on college teacher education student's understanding on even and odd numbers. They recognize even and odd numbers but they can not correctly describe the numbers and they did not know how to algebraically record them.

ZDM Subject Kalsification (2010): D70, E30, F60
Mathematic Subject Classification (2010): 97D70, 97E30, 97F60

[1] Istraživanje je dio šireg projekta „Ustanovljavanje obrazovnih nivoa u matematici“ koje realizuje Naučno društvo matermatičara Banja Luka

1. Uvod

Od ključne je važnosti za uöenike sve školske dobi da uče algebru, uključujući sposobnost generalizacije, koja je neophodna u funkcionisanju našeg sve složenijeg svijetu (Nacionalno vijeća nastavnika Matematike [NCTM], 2000; RAND, 2003), (MPiN, 2009). Učitelji igraju bitnu ulogu u poticanju i razvoju aritmetičkog i ranoalgebarskog zaključivanja - u nižim razredima osnovne škole. Savremene tendencije u nastavi matematike u nižim razredima osnovne škole podrazumjevaju involviranje blage algebraizacije aritmetičkih materijala. Sasvim opravdano se postavlja pitanje - da li su učitelji, školovani na našim univerzitetima, sposobni za takav poduhvat? Istraživanja na javnim univerzitetima u B&H sugerišu - da učiteljski kadar, školovan na našim univerzitetima, još uvijek nije osposoljen za obavljanje te delikatne uloge. Istraživanja su provedena i u nekim drugim zemljama. Sublimacija tih istraživanja može se iskazati u obliku zaključa: nivo baznih ranoalgebarskih znanja učiteljskog kadra je dosta skroman, a njihove vještine generalizacije aritmetičkih i ranoalgebarskih zakonitosti nisu dovoljno visoke (Doerr, 2004; Kieran, 2006; S.Ibrahimpašić, B.Ibrahimpašić i D.A.Romano 2010)

Postojali su mnogi razlozi da se obrati veća pažnja na algebarsko razmišljanje u osnovnim školama. To su uglavnom razlozi za ublažavanje prelaza iz aritmetike u razumijevanje složenijih i apstraktnih koncepata varijabli (Kieran, 1992; Kaput, 2000). Istovremeno, realizatorima nastave matematike u osnovnoj školi (učiteljima i nastavnicima) su slabo poznati koncepti koji su bitni za razumijevanje znanja. (Ma, 1999). Prelaz iz uobičajnih proceduralnih pristupa u aritmetici ka strukturalnim razumijevanjima algebre - ne dolazi lako (Kieran, 1992). Za učitelje bez predznanja, ove činjenice su nevjerovatne. Kako bi se postigli ciljevi podučavanja aritmetičkog i ranoalgebarskog rezonovanja u realizaciji programa nastave matematike u osnovnim školama, istraživači matematičkog obrazovanja bi trebalo da mnogo više znaju o tome da li se oni pripremaju, i kako to rade, za involviranje tih sadržaja u nastavi matematike.

Algebarsko shvatanje na osnovnoj razini podrazumijeva mnoge oblike, uključujući slikovne, te postupke sa brojevima, razumijevanje jednačina i nejednačina - za spoznaju nepoznatog, i izvođenje generalizacija na primjerima. (Carpenter, Franke, i Levi, 2003; Kaput, 2000; NCTM, 2000). To je onaj drugi aspekt algebre kojim ćemo se baviti. Izvođenje generalizacija može se pospješiti vizuelnin nastavnim sredstvima (Bishop, 1997). U ovom radu, mi istražujemo - kako učitelji razumiju izvođenje generalizacije na primjeru parnih i neparnih prirodnih brojeva. Stoga, ovo istraživanje obuhvata sljedeća pitanja: dati prepoznatljiv slikoviti uzorak - kako učitelji tumče pojam generalizacije, i kako ga efektivno izvode? Na kraju, po okončnju aktivnosti, kako uočavaju i vrednuju svoje sposobnosti da podučavaju algebarske generalizacije.

Ovaj izvještaj se odnosi na intervjue sa studentima studijskih programa za učitelje (ili kako se sad pomodno zovu, profesore razredne nastave) na dva univerziteta u Bosni i Hercegovini. U intervjuu (testu), studenti su iskazivali svoju elementarnu matematičku (ne)pismenost: znanja o pojmovima parnih i neparnih prirodnih brojeva, vještine zapisivanja tih brojeva u opštem obliku kao i neka značajnija svojstva tih brojeva. Rezultati koje smo dobili sugerišu nam, vrlo uznemirujući zaključak: aktuelna generacija studenata ovog studijskog programa počesto ne prepoznaje ove pojmove, iako znaju da navedu primjere tih brojeva, oni ih ne znaju da napišu u opštem obliku, niti pak znaju neka njihova bazična svojstva. Ovaj zapanjujući zaključak nam snažno sugeriše da - bez značajnijih priprema, ova generacija studenata ne može da pristupi osavremenjavanju nastave osnovnoškolske aritmetike.

2. Teoretski okvir

Literatura je prepuna radova o problemima algebarskog rezonovanja i o izvođenju generalizacija - kako učenika tako i učitelja. MacGregor i Stacey (1997) istraživali su učenje algebre kod učenika, i otkrili - da ne mogu lako da utvrde odnose u jednostavnim algebarskim izrazima. Učitelji su takođe zloupotrijebili algebarske simbole i sintaksu u relativno jednostavnim problemima (kao na primjer, slovo h da predstavlja visinu). MacGregor i Stacey otkrili su - da su loši nastavni priručnici doprinijeli pogrešnom konceptu - da slovo predstavlja objekt. Realizatori nastave matematike su brojčane primjere proširivali - jednostavnije nego što su mogli uviđati generalizacije o njima. (Mac Gregor & Stacey, 1997; Zaskis & Liljedahl, 2002). Pristup algebarskihm izrazima i jednačinama iz konteksta, Bishup (1997) je ispitivao, kodučenika sedmog i osmog razreda, rješavanje problema obima i površine - na primjeru kocke i pravougaonika, i kako, na osnovu toga, učenici izvode generalizacije. Bishup je utvrdio - da upotreba matematičkih oblika unaprijeđuje algebarsko prosuđivanje, ali nisu svi učenici mogli da izvedu zaključke. Gray, Loud, a Sokolowski (2005) su utvrdili da učitelji na kursevima algebre imaju problema sa korištenjem varijabli, kao generalizacije brojeva.

Za razliku od njih, učenici koji su učestvovali u posebnom razvojnom projektu za učitelje, otkrili smo da su oni bili sposobni za algebarsko rasuđivanje. Treći razred je bio u stanju generalizovati i formalizovati svoje matematičko razmišljanje čak i o neparnim brojevima (Kaput & Blanton, 2000). U toj studiji, učenici su u početku koristili prebrojavanje pri rješavanju problema parnih i neparnih brojeva, a kosnije su te varijable nazivali parnim i neparnim brojevima. Iako nisu bili u formalnoj simboličkoj razini, učesnici u ovoj studiji takođe su parne brojeve uočavali kao brojeve djeljive sa dva. U ovom studiju, treći razred je postigao bolje rezultate nego četvrti razred - koji nije imao ove vidove algebarske nastave. (Kaput & Blanton, 2001). Bishup i Stump (2000) ispituju učitelje. Iako su u semestralnom kursu učitelji obrađivali algebru - na razini fakulteta (što podrazumijeva rješavanje problema, modeliranje i funkcije), oni su utvrdili da mnogi učitelji nisu mogli da otkriju razliku između aritmetike i algebre, kao i oni koji su pravili razlike u toku i na kraju semestra.

3. Metodologija

U obaveznom školskom udžbeniku matematike za drugi razred osnovne škole (B.Čakrlija i P.Đoković, 2009), na stranici 76, obrađena je tema „Parni i neparni brojevi“. Podsjećamo čitaoce - da je nastavnim programom za šesti razred osnovne škole u B&H (MPiN 2009), i Nastavnim programom za prvi razred srednjih škola u B&H (NPiP1 2009) - predviđena tema „Djeljivost u skupu prirodnih brojeva“, u kojoj se ponavljaju pojmovi parnih i neparnih brojeva, te prostih brojeva. Dakle, studenti koji su uspješno okončali bilo koju srednju školu - trebalo bi da znaju šta su parni i neparni prirodni brojevi i, sem toga, kako se zapisuju u opštem obliku. Prilikom susreta ovih studenata sa pojmom realnog broja (u osnovnoj školi, u srednjoj školi i na kursevima matematike tokom studija), obavezno se dokazuje tvrdnja „Broj čiji kvadrat je 2 ne može se napisati u obliku razlomka.“[2] U dokazu ove tvrdnje, osim pojmova relativno prostih brojeva, koristi se i tvrdnja: „*Ako je kvadrat prirodnog broja paran, tada je i sam taj broj paran.*“ Ovaj problem je metodološki vrlo koristan, jer se pri njegovom rješavanju obavezno koristi logička kontrapozicija: „*Ako je prirodan broj neparan, tada je i njegov kvadrat takođe naparan broj*“ kao logički ekvivalent prethodne tvrdnje. Prema tome, pri podučavanju uvoda u realne brojeve - na bilo kom nivou, realizatori nastave matematike moraju koristiti ovdje navedene pojmove, i sredstvo kontrapozicije - kao alat logičkog zaključivanja. Dakle, bilo je za očekivati - da znatan broj studenata prepoznaje pojmove parnih i neparnih prirodnih brojeva, zna ih zapisati algebarski, i zna gore pomenuto svojstvo ovih brojeva.

Preko 200 studenata studijskog programa za razrednu nastavau, i preko 80 studenata studijskog programa za doškolovavanje nastavnika razredne nastave do profesora razredne nastave, i preko 50 studenata studijskog programa za obrazovanje vaspitača učestovavalo je u ovom intervjuu. Većini njih ova pitanja su bila inkorporirana u izlazni test na kursu 'Metodika nastave matematike' (studijski program za razrednu nastavu) i kurs 'Početni matematički pojmovi' (Osnove matematike) (Studijski program za obrazovanje vaspitača), ili su dobrovoljno učestvovali u njemu (studijski program za doškolovavanje).

Njima su postavljena pitanja, koje možemo sublimirati u obliku sljedećeg zadatka:

Zadatak

1.0. Navedi nekoliko parnih prirodnih brojeva.
1.1. *Šta je paran broj*?
1.2. *Kako se to piše u opštem obliku*?
1.3. *Ako je kvadrat prirodnog broja paran broj, tada je i taj broj paran*. Dokazati.

---

[2] Za izračunavanje dijagonala kvadrata d, čije su stranice 1, koristeći Pitagorinu teoremu o pravouglom trouglu, koristi se jednačina $d^2 = 2$. Dakle, iako ova dijagonala sigurno postoji, nije samjeriva sa stranicama ovog kvadrata.

1.4. Koristeći gornju tvrdnju, bez direktnog dokazivanja, izvesti tvrdnju: „*Ako je prirodan broj neparan, tada je i njegov kvadrat takođe neparan broj*.“
2.0 Navedi nekoliko neparnih prirodnih brojeva.
2.1. *Šta je neparan broj*?
2.2. *Kako se to zapisuje u opštem obliku*?
2.3. *Ako je prirodan broj neparan, tada je i njegov kvadrat takođe neparan broj*. Dokazati.
2.4. Koristeći gornju tvrdnju, bez direktnog dokazivanja, izvesti tvrdnju: „*Ako kvadrat prirodnog broja paran broj, tada je i taj broj takođe paran*.“

Rješenje Zadatka:
A. Parni prirodni brojevi su prirodni brojevi djeljivi sa 2. To su, na primjer, brojevi: 2, 4, 6, 8, ... Dakle, ako prirodan broj n dijelimo brojem 2, rezultat će biti opet neki prirodan broj. Označimo ga sa m. Prema tome, svaki od njih se može napisati u obliku n = 2m, gdje je m neki drugi prirodan broj. Neparni prirodni brojevi su brojevi koji nisu parni brojevi. To su, na primjer, brojevi 1, 3, 5, 7, ... Dakle, ne mogu se dijeliti brojem 2, bez ostatka. Prema tome, prirodan broj je neparan ako ima ostatak kod dijeljenja sa brojem 2. Dakle, ako prirodan broj n dijelimo brojem 2, imamo da je rezultat neki prirodan broj – m, i još imamo ostatak kod dijeljenja. Taj ostatak mora biti 1. Zaključujuemo da se neparni prirodni brojevi mogu zapisivati u opštem obliku, ovako n = 2m+1. Na ovaj način zapisani su prirodni brojevi 3, 5, 7, ... Da bi ovom nizu dodali broj 1, opšti oblik neparnih prirodnih brojeva treba zapisivati u obliku n = 2m – 1. Zaista, jer za m = 1, dobijamo n = 1; za m = 2, dobijamo n = 3. I tako dalje. Očigledno je da je bilo koji prirodni broj ili paran ili neparan, i da da svaki prirodni broj mora biti paran ili neparan. Dakle, ako broj nije paran, tada je neparan, Obrnuto, ako broj nije neparan, tada mora biti paran.
B. Da bi dokazali tvdnju iskazanu u zadatku:

„*Ako je kvadrat prirodnog broja paran broj, tada je i taj broj paran*.“,

potrebno je i dovoljno da dokažemo kontrapoziciju te tvrdnje:

„*Ako je prirodna broj neparan, tada je i njegov kvadrat takođe neparan bro*j.“

Ova dva iskaza logički ekvivalentna. Sa A označimo iskaz:

„*Kvadrat prirodnog broja je paran*“,

a sa B iskaz:

„*Broj je paran*.“

Sada, ova tvrdnja ima oblik:

$$A \Rightarrow B.$$

Kontrapozicija ove implikacije glasi:

$$\neg B \Rightarrow \neg A.$$

Riječima se to iskazuje ovako:

„A*ko broj nije paran, tada njegov kvadrat nije paran*.“,

odnosno ovako:

„*Ako je broj neparan, tada je i njegov kvadrat neparan*.“

Ako uzmemo bilo koji neparan prirodan broj n = 2m – 1, tada imamo

$$n^2 = (2m-1)^2 = 4m^2 - 4m + 1 = 2(2m^2 - 2m) + 1.$$

Budući da je rezultat kvadriranja napisan u obliku 2(...)+1, on je takođe neparan broj. Ovim je dokaz završen.
C. Dokazavši tvrdnju: „*Ako je kvadrat prirodnog broja paran broj, tada je i taj broj paran*.“ (na indirektan način), mi smo istovremeno dokazali i tvrdnju - koja je kontrapozicija te tvrdnje: „Ako je prirodan broj neparan, tada je i njegov kvadrat takođe neparan.“

4. Rezultati

Ono što možemo sa sigurnošću reći, studenti u većini slučajeva (preko 75%) prepoznaju parne i neparne prirodne brojeve. Šokantno je utvrditi da skoro 25% studenata čak ni ne prepoznaje ove pojmove elementarne matematičke pismenosti. Jedan znatan broj studenata (oko 50%) zna šta je to paran prirodan broj. Procenat uspješnih odgovora na pitanje sa neparnim brojem - je skromniji (manje od 40%). To je jedino što su, kao odgovor na gornja pitanje, punudili studenti. Nas je zanimalo da li studenti:

- (pitanje 0) prepoznaju pojmove parnih i neparnih brojeva,

- (pitanje 1) mogu riječima opisati te pojmove (tj. da li znaju definicije tih pojmova),
- znaju pojmove parnog i neparnog broja zapisati u opštem obliku (tj. da li mogu definicije tih pojmova zapisati algebarski),
- razumiju i prihvataju tvrdnju o vezama parnih (neparnih) brojeva sa njihovim kvadratima, i
- znaju u kom pravcu ide implikacija u prethodnim tvrdnjama.

Potpuno je neočekivano da nijedan učesnik intervjua nije znao da pojmove parnog i neparnog broja zapiše algebarski[3]. Na ostala pitanja, o osobinama ovih brojeva - nije ponuđen niti jedan odgovor[4].

Radi ilustracije, niže je navedeno nekoliko studentskih odgovora:
Neparan broj je broj koji je djeljiv samim sobom.
Neparan broj je broj koji nema svoj par, odnosno, nije djeljiv brojem 2
Paran prirodan broj je onaj broj koji je djeljiv sa samim sobom, sa jedan i sa nekim drugim brojem, i sa dva.
Neparan broj je svaki broj koji se ne može podijeliti na dva jednaka dijela.
Neparan broj je svaki broj pomnožen sa samim sobom ili drugim neparnim brojem
Prirodan broj je onaj koji je djeljiv sa dva.
Neparan prirodan broj je broj koji se ne može podijeliti sa dva, dijeli se samo sa samim sobom.
(Paran prirodan broj) On je djeljiv sa samim sobom i sa nekim drugim brojevima.
Neparan prirodan broj je onaj koji je djeljiv sa samim sobom.
Neparan prirodan broj je onaj koji nije djeljiv ni sa jednim brojem.
(Paran prirodan broj) je broj koji nije neparan. (Neparan prirodan broj) je onaj koji nije paran.
Neparan broj je broj koj,i pomnožen sa samim sobom, daje neparan broj.
Parni brojevi su 1,3,5,7,9,11,... Neparan prirodan broj je broj koji se ne može dijeliti bez ostatka.
Neparan prirodan broj je onaj koji je nejednak broj jedinici...
Neparan prirodan broj je broj koji nije djeljiv sa parnim brojem.

5. Rasprava i zaključak

U skladu sa Nastavnim planom i programom svi studenati studijskih programa za razrednu nastavu položili su kurseve matematike na fakultetu. Ipak je ovaj test pokazao da su mnogi studenti imali problema sa izvođenjem generalizacije. Rezultati ovog testa znanja, sposobnosti i ovladanih vještina - pokazuju da bi sposobnosti učitelja za izvođenje generalizacija za zadatke tipa $n = 2m$ (parni brojevi) i $n = 2m-1$ (neparni brojevi) - trebalo znatno povećati prije pokretanja projekta involviranja ranoalgebarskih vještina u aritmetičke strukture - u nižim razredima osnovne škole.

To bi za učitelje, oslanjajući se na rezultate ovog intervjua, bio zahtjevan i složen dio njihovih aktivnosti u inoviranju nastavnih silabusa - za prvih pet razreda osnovne škole. Budući da mnogobrojna istraživanja potvrđuju hipotezu da učenička populacija u nižim razredima osnovne škole (3-5 razredi) raspolaže potencijalima da razumiju i prihvate generalizacije aritmetičkih struktura, i njihovo blago involviranje algebrom, te da je poželjno toj populaciji omogućavati da budu pod uticajem nekih fundamentalnih situacija što bi stvaralo mogućnosti da se kod tih učenika razvija ranoalgebrasko mišljenje - od samih početaka nastave aritmetike; ultimativno je neophodno da realizatori nastave matematike - toj učeničkoj populaciji, to znaju, mogu i umiju da prenesu. Autor ovog izvještaja je uvjerenja da bi inkluzija aritmetičkih generalizacija i ranoalgebarsko okruženja u nastavi aritmetike, davala znatno poželjnije ishode nastave matematike nego što je to situacija sa aktuelnim nastavnim programima. Naravno, ova inkluzija je ostvariva samo u slučaju da ministarstva prosvjete u B&H stvore zakonske osnove za primjenu nekih naprednijih teorija matematičkog obrazovanja. Čini se - da bi teorija didaktičkih sitacija bila vrlo povoljno okruženje u namjeri da se postignu značajni rezultatri u projektu „Algebra za sve učenike“.

Literatura:

[3] O aritmetičkom i ranoalgebarskom razumjevanju studenata studijskih programa za obrazovanje učiteljea na našim univerzitetima može se naći u S.Ibrahimpašić, B.Ibrahimpašić i D.A.Romano (2010)

[4] Ovo istraživanje potvrđuje navode istraživanja o razumjevanju logičkih pojmova B.Boričić, B.Ibrahimpašić, E-Liđan i D.A.Romano (2010).

[1] Biehler, Scholz, Strässer and Winkelmann (Editors): *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*; MA: Kluwer, Norwell, 1994.
[2] Bishop, J. W. (1997). *Middle school students' understanding of mathematical patterns and their symbolic representations*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Chicago, IL. (ED410107).
[3] Bishop, J. W., & Stump, S. L. (2000). *Preparing to teach in the new millennium: Algebra through the eyes of preservice elementary and middle school teachers*. PME-NA, 22(2000).
[4] Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school.* Portsmouth, NH: Heinemann.
[5] B.Čakrlija i P.Đoković: *Matematika 2, za drugi razred osnovne škole*; Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Istočno Sarajevo, 2009.
[6] B.Čakrlija i P.Đoković: *Radna sveska 2, Matematika za drugi razred osnovne škole*; Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Istočno Sarajevo, 2009.
[7] Dobrynina, G., & Tsankova, J. (2005). *Algebraic reasoning of young students and preservice elementary teachers.* PME-NA 27 (2005)
from http://convention2.allacademic.com/index.php?cmd=pmena_guest.
[8] Doerr, H. M. (2004). *Teachers' knowledge and the teaching of algebra*. In K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.), The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study (pp. 267-290). Norwood, MA: Kluwer Academic Publishers.
[9] Gray, S. S., Loud, B. J., & Sokolowski, C. P. (2005). *Undergraduates' errors in using and interpreting variables: A comparative study*. PME-NA 27 (2005)
from http://convention2.allacademic.com/index.php?cmd=pmena_guest.
[10] S.Ibrahimpašić, B.Ibrahimpašić i D.A.Romano (2010) *Argumentacija slutnje (formiranje hipoteze) o nivoima razumjevanja osnovnoškolske aritmetike i algebre studenata Pedagoškog fakulteta Univerziteta u Bihaću*, IMO, Vol. II(2010), Broj 3, 3-14
[11] Kaput, J. J. (2000). *Teaching and learning a new algebra with understanding*. U.S.; Massachusetts: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science Dartmouth MA.
[12] Kaput, J. & Blanton, M. (2000). *Generalizing and progressively formalizing in a third grade mathematics classroom: Conversations abut even and odd numbers*.PME-NA 22 (2000), Vol. 1, pp. 115-119.
[13] Kaput, J. & Blanton, M. (2001). *Student achievement in algebraic thinking: A comparison of 3rd graders performance on a 4th grade assessment*. PME-NA 23 (2001), Vol. 1, pp. 99- 107
[14] Kieran, C. (1992). *The learning and teaching of school algebra*. In D. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 390-419). New York: Macmillan Publishing Company.
[15] Kieran, C. (2006). *Research on the learning and teaching of algebra: A broadening of sources of meaning*. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future (pp. 11-49). Rotterdam: Sense Publishers.
[16] Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
[17] MacGregor, M., & Stacey, K. (1997). *Students' understanding of algebraic notation: 11-15*. Educational Studies in Mathematics, 33, 1-19.
[18] MPiN (2009) *Okvirni nastavni planovi i programi matematike za osnovnu školu u Bosni i Hercegovini,* Ministarstvo obrazovanja i nauke, Kanton Sarajevo, Federacija Bosne i Hercegovine, Sarajevo, 2009.
[19] National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: Author.
[20] NPiP1 (2009) *Nastavni planovii programi nastave matematike za prvi razred srednjih škola u Bosni i Hercegovini*
[21] RAND Mathematics Study Panel. (2003). *Mathematical proficiency for all students: Toward a strategic research and development program in mathematics education/RAND Mathematics Study Panel*, Deborah Loewenberg Ball, Chair. Santa Monica, CA: RAND Corporation. (ED-476809)
[22] D.A.Romano: *Istraživanje matematičkog obrazovanja*; IMO, Vol. I (2009), Broj 1, 1-10
[23] D.A.Romano: *Šta je algebarsko mišljenje?* MAT-KOL (Banja Luka), XV(2)(2009), 19-29
[24] Sharp. J., & Hoiberg, K. (2005). *Learning and teaching K-8 mathematics*. New York: Pearson Education.
[25] A. Sierpinska and J. Kilpatrick (editors): *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (vols. 1 & 2). Kluwer Academic Publishers: Great Britain, 1998.
[26] Zazkis, A., & Liljedahl, P. (2002). *Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation.* Educational Studies in Mathematics, 49(3)(2002), 379-402.